

一个二次矩阵方程的解

邱红兵

(广东工业大学 应用数学学院, 广东 广州 510090)

摘要: 利用矩阵的秩分解, 得到了一个二次矩阵方程的通解, 圆满解决了廖祖华于 1999 年提出的公开问题.

关键词: 矩阵方程; 通解; 秩

中图分类号: O 151

文献标识码: A

文章编号: 1007-7162(2008)02-0029-02

本文用 $R^{m \times n}$ 、 R^n 分别表示所有 $m \times n$ 与 n 阶实矩阵全体; $r(A)$ 表示矩阵 A 的秩; E_n 表示 n 阶单位矩阵; O 表示适当阶数的零阵.

文献 [1] 研究了形如

$$X_{s \times m} A_{m \times n} Y_{n \times l} = B_{s \times l} \quad (1)$$

的二次矩阵方程, 得到了式 (1) 有解的充要条件为 $r(A) \geq r(B)$, 给出了当 $r(A) = r(B)$ 时的通解, 并提出一个公开问题: 当 $r(A) > r(B)$ 时, 二次矩阵方程式 (1) 的通解是什么? 本文利用矩阵的秩分解, 圆满地解决了文 [1] 提出的公开问题, 推广了文献 [1] 的结论.

引理 1^[2] $r(A) = r$ 的充要条件为存在可逆矩

阵 P, Q , 使得 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$.

熟知, $m \times n$ 阶矩阵 A 称为行满秩矩阵, 如果 $r(A) = m$; 若存在 $n \times m$ 阶矩阵 B , 使得 $AB = E_m$, 则称 B 为 A 的右逆.

引理 2^[3] 设 $A \in R^{m \times n}$ 为行满秩矩阵, 其右逆为 B , 则 $A_{m \times n} X_{n \times l} = O$ 的通解为 $X = (E_n - BA)U$, 其中 $U \in R^{l \times l}$ 为任意矩阵.

定理 1 设 $A \in R^{m \times n}$, $B \in R^{s \times l}$, 且 $A = P \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q$, $B = S \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} T$, 其中 P, Q, S, T 均为可逆矩阵, 则当 $r(A) = r \geq k = r(B)$ 时, 矩阵方程 (1) 的通解为

$$\begin{aligned} X &= S \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ V(E_r - Y_{11}X_{11}) & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1}, \\ Y &= Q^{-1} \begin{pmatrix} Y_{11} & (E_r - Y_{11}X_{11})U \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} T, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, X_{11} 为任意的 $k \times r$ 行满秩矩阵, Y_{11} 是其右逆,

$X_{12} \in R^{k \times (m-r)}$, $X_{22} \in R^{(s-k) \times (m-r)}$, $Y_{21} \in R^{(n-r) \times k}$, $Y_{22} \in R^{(n-r) \times (t-k)}$ 为任意矩阵, $V \in R^{(s-k) \times r}$, $U \in R^{r \times (t-k)}$ 为满足 $V(E_r - Y_{11}X_{11})U = O$ 的任意矩阵.

证明 一方面, 设 X, Y 由式 (2) 给出, 利用

$X_{11}Y_{11} = E_k$ 及 $V(E_r - Y_{11}X_{11})U = O$, 有

$$\begin{aligned} XAY &= S \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ V(E_r - Y_{11}X_{11}) & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1} P \times \\ &\begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} Q Q^{-1} \begin{pmatrix} Y_{11} & (E_r - Y_{11}X_{11})U \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} T = \\ &S \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ V(E_r - Y_{11}X_{11}) & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_{11} & (E_r - Y_{11}X_{11})U \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} T = \\ &S \begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} & X_{11}(E_r - Y_{11}X_{11})U \\ V(E_r - Y_{11}X_{11})Y_{11} & V(E_r - Y_{11}X_{11})(E_r - Y_{11}X_{11})U \end{pmatrix} T = \\ &S \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} T = B, \end{aligned}$$

即式 (2) 为式 (1) 的解.

另一方面, 设 X, Y 为式 (1) 的任意解, 即

$$\begin{aligned} XAY &= B, \\ XP \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} QY &= S \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix} T, \\ (S^{-1}XP) \begin{pmatrix} E_r & O \\ O & O \end{pmatrix} (QYT^{-1}) &= \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3)$$

将 $S^{-1}XP$ 与 QYT^{-1} 进行如下分块

$$\begin{aligned} S^{-1}XP &= \begin{pmatrix} r & m-r \\ X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} k \\ s-k \end{matrix}, \\ QYT^{-1} &= \begin{pmatrix} k & t-k \\ Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} \begin{matrix} r \\ n-r \end{matrix} \end{aligned}$$

代入式 (3) 得

$$\begin{pmatrix} X_{11}Y_{11} & X_{11}Y_{12} \\ X_{21}Y_{11} & X_{21}Y_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_k & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

即有

$$X_{11}Y_{11} = E_k, \quad (4)$$

$$X_{11}Y_{12} = O, \quad (5)$$

$$X_{21}Y_{11} = O, \quad (6)$$

$$X_{21}Y_{12} = O. \quad (7)$$

由式(4)知 X_{11} 为行满秩矩阵, 且 Y_{11} 为 X_{11} 的右逆.

由式(5)及引理 2 得

$$Y_{12} = (E_r - Y_{11}X_{11})U, \quad (8)$$

其中 $U \in R^{r \times (t-k)}$. 同理, 由式(6)有

$$X_{21} = V(E_r - Y_{11}X_{11}), \quad (9)$$

其中 $V \in R^{(s-k) \times r}$. 利用式(8)、(9), 有

$$X_{21}Y_{12} = V(E_r - Y_{11}X_{11})(E_r - Y_{11}X_{11})U = V(E_r - Y_{11}X_{11})U,$$

从而式(7)等价于

$$V(E_r - Y_{11}X_{11})U = O.$$

于是

$$X = S \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ V(E_r - Y_{11}X_{11}) & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1},$$

$$Y = Q^{-1} \begin{pmatrix} Y_{11} & (E_r - Y_{11}X_{11})U \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} T,$$

其中 X_{11} 为任意的 $k \times r$ 行满秩矩阵, Y_{11} 是其右逆, $X_{12} \in R^{k \times (m-r)}$, $X_{22} \in R^{(s-k) \times (m-r)}$, $Y_{21} \in R^{(n-r) \times k}$, $Y_{22} \in R^{(n-r) \times (t-k)}$ 为任意矩阵, $V \in R^{(s-k) \times r}$, $U \in R^{r \times (t-k)}$

为满足 $V(E_r - Y_{11}X_{11})U = O$ 的任意矩阵.

故式(2)是式(1)的通解.

推论 1^[1] 设 A, B 如定理 1, 若 $r = k$, 则矩阵方程(1)的通解为

$$X = S \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ O & X_{22} \end{pmatrix} P^{-1}, Y = Q^{-1} \begin{pmatrix} X_{11}^{-1} & O \\ Y_{21} & Y_{22} \end{pmatrix} T$$

其中 X_{11} 是任意的 r 阶可逆矩阵, $X_{12} \in R^{r \times (m-r)}$, $X_{22} \in R^{(s-r) \times (m-r)}$, $Y_{21} \in R^{(n-r) \times r}$, $Y_{22} \in R^{(n-r) \times (t-r)}$ 为任意矩阵.

证明 当 $r = k$ 时, X_{11} 为 r 阶可逆矩阵, 此时 $Y_{11} = X_{11}^{-1}$, 有 $Y_{11}X_{11} = E_r$, 代入式(2)即得所要结论.

参考文献:

- [1] 廖祖华. 体上二次矩阵方程的解[J]. 工科数学, 1999, 5(4): 72-74
- [2] 王松桂, 杨振海. 广义逆矩阵及其应用[M]. 北京: 北京工业大学出版社, 1996
- [3] 倪国熙. 常用的矩阵理论和方法[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 1984

Solution to a Second Order Matrix Equation

Q i H ong-b i ng

(Faculty of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510090, China)

Abstract With the rank decomposition of matrices, the general solutions to a quadratic matrix equation have been obtained, which satisfactorily resolves the open issue that Liao Zu-hua proposed in 1999.

Key words matrix equation; general solutions; rank